第22講　ユークリッドの互除法，整数の性質

§1　ユークリッドの互除法

要点整理 と 公式

要点1 割り算の余りと最大公約数

187 と 119 の最大公約数は 17 である。この 17 を，除法の原理を用いて求めることを考える。

187 を 119 で割ったときの商は 1，余りは 68 である。よって除法の原理より

$187 = 119 \cdot 1 + 68$ … ①　と表される。この式を変形して，

$68 = 187 - 119 \cdot 1$ … ②

ここで，②の式は

$68 = 17 \cdot 11 - 17 \cdot 7 \cdot 1$

$\quad = 17 \cdot (11 - 7 \cdot 1)$

と変形できる。この式から，17 は 68 の約数であることがわかる。

よって，187 と 119 の公約数 17 は，119 と 68 の公約数でもある。

つまり，187 と 119 の公約数を a とすると，a は 119 と 68 の公約数でもある。

また，119 と 68 の公約数を b とすると，①より b は 187 の約数であることがわかる。

つまり，119 と 68 の公約数を b とすると，b は 187 と 119 の公約数でもある。

以上より，187 と 119 の公約数と，119 と 68 の公約数は一致する。

したがって，187 と 119 の最大公約数と，119 と 68 の最大公約数は一致する。

一般に，2 つの自然数 a，b の最大公約数について，次のことが成り立つ。

■ 割り算の余りと最大公約数

自然数 a を自然数 b で割ったときの余りを r とすると

a と b の最大公約数は，b と r の最大公約数に等しい。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

要点❷ ユークリッドの互除法

割り算の余りと最大公約数の関係を用いた以下の①と②の手順により 2 つの自然数 a, b の最大公約数を求める方法を「 ユークリッドの　　　　　」（または略して「互除法」）という。

①　a を b で割ったときの余りを r とする。

②　$r > 0$ のとき，

　　a と b の最大公約数は，b と r の最大公約数に等しい。

　　よって，a を b に，b を r におきかえて，①に戻る。

　$r = 0$ のとき

　　a と b の最大公約数は，b である。

187 と 119 の最大公約数を互除法で求める。

$187 = 119 \cdot 1 + 68$ …（187 と 119 の最大公約数）　=（119 と 68 の最大公約数）

$119 = 68 \cdot 1 + 51$ …（119 と 68 の最大公約数）　=（　　　と　　　の最大公約数）

$68 = 51 \cdot 1 + 17$ …（68 と 51 の最大公約数）　=（　　　と　　　の最大公約数）

$51 = 17 \cdot 3 + 0$ … 余りが 0 より，（51と17の最大公約数）=

よって，187 と 119 の最大公約数は 17

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

次の2つの自然数の最大公約数を，互除法を用いて求めよ。

(1)　1008，810　　　　(2)　1057，481

Point Pickup

2つの自然数 a，b の最大公約数

素因数分解による方法が困難なときは，「互除法」が有効。

a を b で割った余りを r とすると

（a と b の最大公約数）＝（b と r の最大公約数）

これを繰り返し，$r=0$ になったとき，（a と b の最大公約数）$=b$　である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 ▶ 1次不定方程式

要点整理 と 公式

要点3　1次不定方程式

a, b, c は整数で，$a \neq 0$, $b \neq 0$ とするとき，x, y の1次方程式

$$ax + by = c$$

を成り立たせる解 x, y は無数に存在する。

よって，この方程式のことを「(2元) 1次不定方程式」という。

また，方程式を成り立たせる整数 x, y の組を，この方程式の「　　　　」という。

方程式 $4x - 3y = 0$　の整数解を求める。

この方程式を変形すると　$4x = 3y \cdots$ ①

4, 3 は互いに素より，x は　　の倍数である。

よって，$x =$　　（k は整数）と表される。

このとき①より $4 \cdot 3k = 3y$　よって　$y = 4k$　と表される。

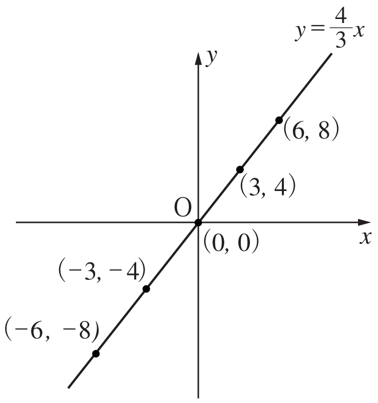
したがって，求める整数解は　$x = 3k$, $y = 4k$（k は整数）である。

例えば，$k = 0$ のとき $(x, y) = (0, 0)$

　　　$k = 1$ のとき $(x, y) = (3, 4)$ である。

整数 k は無数に存在するので，

方程式 $4x - 3y = 0$ の整数解も無数に存在する。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

要点４　$ax + by = 1$ の整数解

方程式 $4x - 3y = 1$ … ① の整数解を求める。

この方程式の整数解の１つは $x = 1$，$y =$

よって，$4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 1$ … ②

①－② より $4(x - 1) - 3(y - 1) = 0$

つまり $4(x - 1) = 3(y - 1)$ … ③

４と３は互いに素より，$x - 1$ は３の倍数である。

よって，$x - 1 = 3k$（k は整数）と表される。

このとき③より $4 \cdot 3k = 3(y - 1)$　　$y - 1 = 4k$

したがって，求める整数解は　$x = 3k + 1$，$y = 4k + 1$（k は整数）　である。

このように，１次不定方程式の整数解が１つ見つかれば，この方程式を満たす整数解をすべて求めることができる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

次の方程式の整数解をすべて求めよ。

(1)　$3x - 5y = 0$　　　(2)　$8x + 5y = 1$

Point Pickup

１次不定方程式 $ax + by = 1$ の整数解

⇒　整数解 x, y を１つ見つけ，

それを元の式に代入した式と，元の方程式との差をとる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 ▸ １次不定方程式とユークリッドの互除法

要点整理 と 公式

要点5 1次不定方程式の整数解と互除法

35 と 29 の最大公約数を互除法で求めると，

$35 = 29 \cdot 1 + 6$　…①

$29 = 6 \cdot 4 + 5$　…②

$6 = 5 \cdot 1 + 1$　…③

$5 = 1 \cdot 5 + 0$　…④ より，最大公約数は 1 である。

ここで，余りに注目して①～③を変形すると

③より $1 = 6 - 5 \cdot 1$　… ③′

②より $5 =$　… ②′

①より　… ①′

③′ に②′，①′ をそれぞれ代入すると

$1 = 6 - 5 \cdot 1$

$= 6 - (29 - 6 \cdot 4) \cdot 1 = 6 - 29 \cdot 1 + 6 \cdot 4 = 6 \cdot 5 - 29 \cdot 1$

$= (35 - 29 \cdot 1) \cdot 5 - 29 \cdot 1 = 35 \cdot 5 - 29 \cdot 5 - 29 \cdot 1 = 35 \cdot 5 - 29 \cdot 6$

つまり，$35 \cdot 5 + 29 \cdot (-6) = 1$ と変形できる。

これは，方程式 $35x + 29y = 1$ の解の 1 つが $x = 5$，$y = -6$ であることを表している。

よって，1 次不定方程式 $35x + 29y = 1$ の整数解の 1 つは，35 と 29 に互除法を用いることで求めることができる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

次の方程式の整数解の 1 つを，互除法を用いて求めよ。

$$42x + 29y = 1$$

Point Pickup

1 次不定方程式 $ax + by = 1$ の整数解と互除法

⇒　方程式の整数解の 1 つが見つからないときは，

a と b に互除法を用いる方法がある。

①　a と b に互除法を繰り返し用いる。余りが 1 になったら終了。

②　①の式を　(余り)＝(割られる数)－(割る数)×(商)

の形にし，逆にたどる（代入する)。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 整数の性質の活用

要点整理 と 公式

要点6 分数と有限小数，循環小数

有理数 … 分数 $\dfrac{m}{n}$ の形で表される数（m は整数，n は正の整数）

有理数
- 整数(自然数，0，負の整数)　$\dfrac{-4}{2} = -2$
- 有限小数　$\dfrac{7}{4} = 1.75$
- 循環小数　$\dfrac{4}{37} = 0.108108\cdots\cdots = 0.\dot{1}0\dot{8}$

※それ以上約分できない分数を「既約分数」という。

既約分数においては，分母と分子が互いに素である。

有限小数は 必ず $\dfrac{整数}{10^k}$ の形となっている。　(ex) $0.246 = \dfrac{246}{}$

$10^k = 2^k \cdot 5^k$　より，有限小数の分母の素因数は 2 と 5 だけである。

逆に，既約分数 $\dfrac{m}{n}$ の分母 n に 2 と 5 以外の素因数があれば，循環小数となる。

要点7 n 進法

ある数を表すとき，これまでは位取りの基礎を 10 とする「10 進法」を使ってきた。

10 進法で表される数(これを 10 進数という)は，まとまりごとに

右から 1，　　，　　　…… を位とし，各位に 0 から 9 までの　　個の数字を用いる。

例えば 10 進法で 1234 と表された数は $1\cdot10^3 + 2\cdot10^2 + 3\cdot10 + 4\cdot1$ を意味している。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

位取りの基礎を 2 とする数の表し方を「2 進法」という。2 進法では，位を右から

1，　　，　　^{2}，……とし，各位に 0，1 の　　個の数字を用いる。

（ex）2 進法で 10101 と表された数は $1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1$ を表している。

一般に，位取りの基礎を n（$n \geqq 2$）として数を表す方法を「n 進法」，n 進法で表された数を「n 進数」という。n 進数は，その数の右下に（n）をつけて表す。10 進数は普通省略する。

（ex）2 進法で 10101 を表す数は $10101_{(2)}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

［1］ $\dfrac{12}{41}$ を循環小数で表したとき，小数第 77 位の数字を求めよ。

［2］ (1)　2 進数 $110010_{(2)}$ を 10 進数で表せ。

(2)　10 進数 87 を 2 進数で表せ。

Point Pickup

n 進数 → 10 進数

⇒　n 進数の各位について(位の数字)×(位の表す数)に直し，

その和を求める。

10 進数 → n 進数

⇒　①　10 進数で表された数を n で割り，その商と余りを求める。

②　①の商を n で割り，その商と余りを求める。

商が 0 になるまで②を繰り返す。

③　②で出てきた余りを逆順に並べ，最後に①の余りを並べる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第22講　確認テスト

1 608 を 171 で割ると，商が [ア]，余りが [イウ] である。よって，608 と 171 の最大公約数は，171 と [イウ] の最大公約数に等しい。この考え方に従って割り算を繰り返していくことにより，608 と 171 の最大公約数は [エオ] であることがわかる。

2 $7x-3y=1$ …① の整数解をすべて求める。

この方程式の解の 1 つは　$x=1$，$y=$ [カ] である。よって $7\cdot1-3\cdot$ [カ] $=1$ …②

①－②より　$7(x-1)=3(y-$ [カ] $)$ …③

7 と 3 は互いに素より，$x-1$ は [キ] の倍数である。

よって，$x-1=$ [キ] k（k は整数）　と表される。

このとき③に代入すると　　$y-2=$ [ク] k

したがって，求める整数解は　$x=$ [キ] $k+1$，$y=$ [ク] $k+$ [カ]（k は整数）　である。

3 $\dfrac{3}{7}$ を循環小数で表したとき，小数第 50 位の数字は [ケ] である。

4 2 進数　$11011_{(2)}$ を 10 進数で表すと [コサ] である。

また，10 進数 25 を 2 進数で表すと [シスセソタ]$_{(2)}$ である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第22講　ユークリッドの互除法，整数の性質

1

（1）$1008 = 810 \cdot 1 + 198$

$810 = 198 \cdot 4 + 18$

$198 = 18 \cdot 11 + 0$

よって，1008 と 810 の最大公約数は　18

（2）$1057 = 481 \cdot 2 + 95$

$481 = 95 \cdot 5 + 6$

$95 = 6 \cdot 15 + 5$

$6 = 5 \cdot 1 + 1$

$5 = 1 \cdot 5 + 0$

したがって，1057 と 481 の最大公約数は　1

2

（1）$3x - 5y = 0$　を変形すると $3x = 5y$ …①

3 と 5 は互いに素より，x は 5 の倍数である。

よって，$x = 5k$（k は整数）　と表される。

このとき①より $3 \cdot 5k = 5y$　　$y = 3k$

したがって，求める整数解は　$x = 5k$，$y = 3k$（k は整数）　である。

（2）$8x + 5y = 1$ … ①

この方程式の解の 1 つは $x = 2$，$y = -3$

よって $8 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) = 1$ … ②

①－②より $8(x-2) + 5(y+3) = 0$　つまり $8(x-2) = -5(y+3)$ … ③

8 と 5 は互いに素より，$x - 2$ は 5 の倍数である。

よって，$x - 2 = 5k$（k は整数）　と表される。

このとき③より $8 \cdot 5k = -5(y+3)$　　$y + 3 = -8k$

したがって，求める整数解は　$x = 5k + 2$，$y = -8k - 3$　（k は整数）である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　42 と 29 に互除法を用いると

$42 = 29 \cdot 1 + 13 \cdots ①$

$29 = 13 \cdot 2 + 3 \quad \cdots ②$

$13 = 3 \cdot 4 + 1 \quad \cdots ③$

ここで，①～③を余りに注目して変形すると

③より　$1 = 13 - 3 \cdot 4 \quad \cdots ③'$

②より　$3 = 29 - 13 \cdot 2 \cdots ②'$

①より　$13 = 42 - 29 \cdot 1 \cdots ①'$

③′に②′を，②′に①′を代入すると

$1 = 13 - 3 \cdot 4$

$= 13 - (29 - 13 \cdot 2) \cdot 4 = 13 - 29 \cdot 4 + 13 \cdot 8 = 13 \cdot 9 - 29 \cdot 4$

$= (42 - 29 \cdot 1) \cdot 9 - 29 \cdot 4 = 42 \cdot 9 - 29 \cdot 9 - 29 \cdot 4$

$= 42 \cdot 9 - 29 \cdot 13$

よって $42 \cdot 9 + 29 \cdot (-13) = 1$　より

方程式 $42x + 29y = 1$　の整数解の 1 つは $x = 9$，$y = -13$ である。

4

［1］ $\dfrac{12}{41} = 0.2926829268 \cdots\cdots = 0.\dot{2}926\dot{8}$

よって，小数点以下で，29268 の 5 個の数字が循環する。

$77 = 5 \cdot 15 + 2$　より，小数第 77 位の数字は，29268 の 2 番目の数字で　9

［2］ (1)　$110010_{(2)} = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 32 + 16 + 2 = 50$

(2)　87 を 2 で割ると，商は 43 で余りは 1　… ①

43 を 2 で割ると，商は 21 で余りは 1　… ②

21 を 2 で割ると，商は 10 で余りは 1　… ③

10 を 2 で割ると，商は 5 で余りは 0　… ④

5 を 2 で割ると，商は 2 で余りは 1　… ⑤

2 を 2 で割ると，商は 1 で余りは 0　… ⑥

1 を 2 で割ると，商は 0 で余りは 1　… ⑦

	余り	
2) 87		
2) 43	1	①
2) 21	1	②
2) 10	1	③
2) 5	0	④
2) 2	1	⑤
2) 1	0	⑥
0	1	⑦

①～⑦の余りを⑦から①まで逆順に並べて，$1010111_{(2)}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第22講　確認テスト

1 608 を 171 で割ると，商が ア ，余りが イウ である。よって，608 と 171 の最大公約数は，171 と イウ の最大公約数に等しい。この考え方に従って割り算を繰り返していくことにより，608 と 171 の最大公約数は エオ であることがわかる。

2 $7x-3y=1$ … ① の整数解をすべて求める。

この方程式の解の 1 つは　$x=1$，$y=$ カ である。よって $7\cdot1-3\cdot$ カ $=1$ … ②

①−②より　$7(x-1)=3(y-$ カ $)$ … ③

7 と 3 は互いに素より，$x-1$ は キ の倍数である。

よって，$x-1=$ キ k（k は整数）　と表される。

このとき③に代入すると　　$y-$ カ $=$ ク k

したがって，求める整数解は　$x=$ キ $k+1$，$y=$ ク $k+$ カ（k は整数）　である。

3 $\dfrac{3}{7}$ を循環小数で表したとき，小数第 50 位の数字は ケ である。

4 2 進数　$11011_{(2)}$ を 10 進数で表すと コサ である。

また，10 進数 25 を 2 進数で表すと シスセソタ$_{(2)}$ である。

{ 解答 }

1　ア 3　イ 9　ウ 5　エ 1　オ 9

2　カ 2　キ 3　ク 7

3　ケ 2

4　コ 2　サ 7　シ 1　ス 1　セ 0　ソ 0　タ 1

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。